(Sujet commun ENS : ULM, LYON et CACHAN)

DURÉE : 3 heures

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$u_n(x) = P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le but du problème est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$ sur différents exemples. On s'intéressera plus particulièrement à la convergence vers 0 de cette suite, exponentiellement rapidement au sens suivant : on dira qu'une suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ de réels positifs ou nuls converge vers 0 avec une vitesse exponentielle, s'il existe un réel $\beta > 0$ tel que :

$$\lim_{n \to \infty} e^{n\beta} v_n = 0.$$

Le problème comporte trois parties indépendantes.

La première traite trois exemples distincts, lorsque $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes et de même loi, admettant des moments jusqu'à l'ordre deux inclus. *Les trois questions de cette partie sont indépendantes les unes des autres.* Dans la seconde partie on considère un exemple où les variables sont toujours indépendantes et de même loi mais n'admettant pas de moment d'ordre un. La troisième partie traite d'un exemple où les variables ne sont plus indépendantes.

La fonction exponentielle de base e sera notée indifféremment :

$$y \to e^y \quad \text{ou} \quad y \to \exp(y),$$

sa fonction réciproque (logarithme népérien) sera notée $y \to \ln(y)$.

Lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X seront notées respectivement $E[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie la suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes (c'est-à-dire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les variables $X_1, \ldots, X_k$ sont indépendantes) de même loi admettant des moments jusqu'à l'ordre deux inclus.

On notera $m = E[X_i]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_i]$, ceci pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que l'inégalité de CEBIČEV permet de montrer que :

$$\text{pour } x > m, \quad u_n(x) \leqslant \frac{\sigma^2}{n(x-m)^2}.$$

En particulier, pour $x > m$, $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0$. On s'intéresse dans cette partie à la convergence exponentiellement rapide de cette suite.

1. Soit a un nombre réel strictement positif.

a. Vérifier que les intégrales suivantes :

$$I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{a^2}{t^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$J(a) = \int_a^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$K(a) = \int_a^{+\infty} \frac{t}{a} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

sont convergentes, et que $I(a) \leqslant J(a) \leqslant K(a)$.

b. Calculer $K(a)$, puis à l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I(a)$ et $J(a)$.

En déduire :

$$\frac{a}{1+a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \leqslant \int_a^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leqslant \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

c. On suppose que les X_i sont des variables gaussiennes avec $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. On rappelle qu'alors S_n est une variable gaussienne dont on précisera les paramètres. Pour $x > 0$, donner un équivalent de $u_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.*a.* Soient α et a des nombres réels tels que $\alpha > a \geqslant 0$. Étudier les variations de la fonction $u \to u^\alpha e^{-u}$, définie sur $[0, +\infty[$.

En déduire :

$$\int_0^a u^\alpha e^{-u}\, du \leqslant a^{\alpha+1} e^{-a}.$$

b. On suppose que les X_i sont des variables de Poisson de paramètre θ ($\theta > 0$). Rappeler sans démonstration la valeur de m. On rappelle qu'alors S_n est une variable de Poisson, dont on précisera le paramètre.

Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(k) = \int_0^{n\theta} \frac{u^{nk-1}}{(nk-1)!} e^{-u}\, du.$$

c. On rappelle que pour $j \in \mathbb{N}^*$, $j! = (2\pi j)^{1/2} \left(\frac{j}{e}\right)^j \exp(\xi_j)$, où $0 \leqslant \xi_j \leqslant \frac{1}{12j}$.

Montrer que lorsque n tend vers l'infini $\frac{(n\theta)^{nk} e^{-n\theta}}{(nk-1)!}$ est équivalent à

$$(2\pi)^{-1/2} (nk)^{1/2} \exp\left(-nk\left(\ln\left(\frac{k}{\theta}\right) - 1 + \frac{\theta}{k}\right)\right).$$

En déduire, à l'aide de *a.* et *b.*, que, pour $k > \theta$, $u_n(k)$ converge vers 0 avec une vitesse exponentielle lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On suppose que les X_i sont des variables exponentielles de paramètre 1.

a. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}\, e^{tu}\, du$$

est-elle convergente ?

On admettra que $E[\exp(t(X_1 + \ldots + X_n))] = (E[\exp(tX_1)])^n$ dès que le second membre a un sens.

En déduire que pour $t < n$, la fonction $\varphi_n(t) = \ln E\left[\exp\left(t\frac{S_n}{n}\right)\right]$ est bien définie, puis la calculer.

b. Montrer que pour $x > 0$, la fonction $g_x(t) = tx - \varphi_n(t)$, définie pour $t < n$, admet un unique maximum, noté $\psi_n(x)$, que l'on déterminera.

c. Montrer que pour $x > 0$ et $n > t > 0$,

$$u_n(x) \leqslant E\left[\exp\left(t\left(\frac{S_n}{n} - x\right)\right)\right],$$

puis, en utilisant le *b.*, que $u_n(x) \leqslant \exp(-\psi_n(x))$.

En déduire que pour $x > 1$, $u_n(x)$ converge vers 0 avec une vitesse exponentielle lorsque n tend vers $+\infty$.

DEUXIÈME PARTIE

Une variable de Cauchy de paramètre a $(a > 0)$ est une variable aléatoire dont la loi a pour densité :

$$f_a(t) = \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)}.$$

1. Montrer que si X est une variable de Cauchy de paramètre a, λX est une variable de Cauchy de paramètre $|\lambda|\, a$ pour tout λ réel non nul.

2.*a.* Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer les réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$g_y(t) = \frac{1}{(1 + t^2)(1 + (t - y)^2)} = \frac{\alpha t + \beta}{1 + t^2} + \frac{\gamma(t - y) + \delta}{1 + (t - y)^2}.$$

En déduire $\int_{-A}^{A} g_y(t)\, dt$ pour tout $A > 0$.

b. Soient X et Y deux variables de Cauchy de paramètre 1 indépendantes.

On rappelle que $X + Y$ est une variable aléatoire dont la loi a une densité g donnée par :

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_1(y - t)\, dt.$$

Quelle est la loi de $X + Y$?

3. On suppose que les X_i sont des variables de Cauchy de paramètre 1 et indépendantes, et que $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $\frac{S_n}{n}$? Que vaut $u_n(x)$ pour $x \geqslant 0$? Ce résultat est-il en contradiction avec la loi faible des grands nombres ?

TROISIÈME PARTIE

On considère la matrice (2, 2), $\Pi = \begin{bmatrix} \pi(0,0) & \pi(0,1) \\ \pi(1,0) & \pi(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

On suppose désormais que les variables $(X_k)_{k \geqslant 1}$ prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$, de telle sorte que :

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

et pour tout $k \geqslant 1$, et $\forall\, i, j \in \{0, 1\}$,

(*) $$P(X_{k+1} = j / X_k = i) = \pi(i, j),$$

(**) $\forall\, l_1, \ldots, l_{k-1} \in \{0, 1\}$,

$$P(X_{k+1} = j / X_k = i, X_{k-1} = l_{k-1}, \ldots, X_1 = l_1) = P(X_{k+1} = j / X_k = i),$$

où $P(A/B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

1. Pour $k \geqslant 1$ on note $p_k = P(X_k = 1)$.

   a. À l'aide de la relation (*), calculer p_2 puis établir une relation de récurrence entre p_k et p_{k+1}. Les $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ont-elles même loi ? Sont-elles indépendantes ?

   b. Montrer que $\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{1}{3}$. En déduire que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} E[S_n] = \frac{1}{3}$.

2. On définit :

$$\Pi_t = \begin{bmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ c_1(t) & d_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & (1/2)e^t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La puissance n-ième de Π_t est notée Π_t^n, $\Pi_t^n = \begin{bmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{bmatrix}$.

Pour $t \geqslant 0$, on pose $M_n(t) = E[\exp(tS_n)]$. On admettra que la relation (**) permet de montrer que :

$$M_n(t) = a_n(t) + b_n(t).$$

a. Montrer que les valeurs propres de Π_t sont réelles. On note $\rho(t)$ la plus grande valeur propre. Montrer que $t \to \rho(t)$ est dérivable et croissante sur $]0, +\infty[$, dérivable à droite en 0. Que valent $\rho(0)$ et $\rho'(0)$? Vérifier que $\begin{bmatrix} \rho(t) \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\rho(t)$.

b. Montrer les relations :

$$a_n(t) + b_n(t) \leqslant (\rho(t))^{n+1}, \tag{1}$$

$$c_n(t) + d_n(t) \leqslant (\rho(t))^n. \tag{2}$$

3.*a.* Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x \geqslant 0$, $u_n(x) \leqslant M_n(t)\, e^{-ntx}$, puis que :

$$u_n(x) \leqslant \exp\left(-n\left(tx - \frac{n+1}{n} \ln(\rho(t))\right)\right).$$

b. On suppose que $x > \frac{1}{3}$, et on pose $g_{n,x}(t) = tx - \frac{n+1}{n} \ln(\rho(t))$ pour $t > 0$.

Montrer que $\forall t > 0$, $g_{n,x}(t) \leqslant g_{n+1,x}(t)$. Calculer $g_{n,x}(0)$ et $g'_{n,x}(0)$.

En déduire :

$$\exists\, t_0 > 0 \text{ et } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \forall\, n \geqslant n_0,\ g_{n,x}(t_0) \geqslant g_{n_0,x}(t_0) > 0.$$

c. Montrer que pour $x > \frac{1}{3}$, $u_n(x)$ converge vers 0 avec une vitesse exponentielle lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on dire de plus lorsque $x > \frac{1}{2}$?